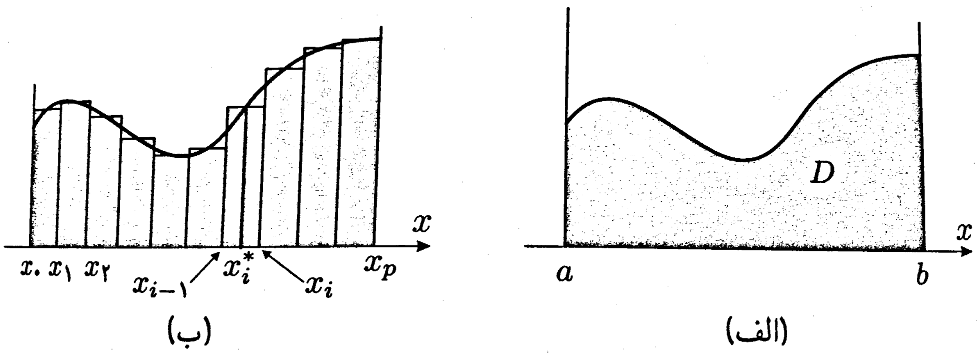
فصل چهارم-مفهوم انتگرال

در این کاربرگ می‌خواهیم انتگرال ریمان را تعریف کنیم و خواص ابتدایی آن را بررسی می‌کنیم. همان‌طور که از قبل می‌دانید انتگرال ریمان یک تابع نامنفی پیوسته روی بازه بسته، برابر مساحت زیر نمودار آن است. مساحت زیر نمودار تابع را می‌توانیم به صورت تقریبی مجموع مستطیل‌های به دلخواه کوچک بنویسیم (شکل ۱).



شکل ۱

تعریف ۱. دنباله‌ای متناهی از نقاط $[a,b]$ مانند $x_۰$، $x_۱$، ...، x_p را در نظر بگیرید که
$$a = x_۰ \leq x_۱ \leq x_۲ \leq \cdots \leq x_p = b.$$
چنین دنباله‌ای را یک افراز بازه $[a,b]$ می‌نامیم و آن را با $\mathcal{P} = (x_۰, x_۱, \cdots, x_p)$ نشان می‌دهیم. ماکسیمم طول بازه‌های $[x_i, x_{i+۱}]$ را ضخامت افراز $\mathcal{P}$ می‌گوییم. همچنین $\mathcal{P}'$ را یک تظریف از $\mathcal{P}$ می‌گوییم هرگاه نقاط $\mathcal{P}$ زیرمجموعه‌ای از نقاط $\mathcal{P}'$ باشد.

تعریف ۲. برای افراز $\mathcal{P}$، x_i^* را نقطه‌ای دلخواه در بازه $[x_{i-۱}, x_i]$ انتخاب می‌کنیم و روی بازه $[x_{i-۱}, x_i]$ مستطیلی به ارتفاع $f(x_i^*)$ می‌سازیم. مجموع مساحت‌های این مستطیل‌ها برابر است با
$$\sum_{i=۱}^{p} (x_i - x_{i-۱}) f(x_i^*).$$
این مجموع را می‌توان تقریبی از مساحت D (شکل ۱) تلقی کرد. چنین مجموعی از مساحت‌های مستطیل‌ها که قاعده‌شان زیربازه‌های افراز و ارتفاعشان مقدار f در نقطه‌ای از همان زیربازه باشد، یک **مجموع ریمان** نامیده می‌شود.

فعالیت ۱. تابع ثابت $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ با ضابطه $f(x)=c$ را در نظر بگیرید. مجموع ریمانی برای این تابع بنویسید.

فعالیت ۲.

الف) مساحت زیر نمودار تابع $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ با ضابطه $f(x)=x$ را محاسبه کنید.

- ابتدا برای هر افراز دلخواه $\mathcal{P}$، x_i^* را طوری انتخاب کنید که مجموع ریمان متناظر حداکثر و حداقل مقدار ممکن باشد. اولی را تقریب بالایی $M(\mathcal{P},f)$، و دومی را تقریب پایینی $m(\mathcal{P},f)$، می‌نامند.
- **سپس نشان دهید این دو مجموع وقتی ضخامت افرازها به صفر میل می‌کند، به یک عدد همگراست.**

ب) مساحت زیر نمودار تابع $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ با ضابطه $f(x)=x^2$ را محاسبه کنید.

تعریف ۳. تابع $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ را انتگرال‌پذیر با مقدار انتگرال I می‌گوییم هرگاه برای هر $\varepsilon>0$، $\delta>0$ ای وجود داشته باشد که برای هر افراز با طول کمتر از δ، هر مجموع ریمان متناظر با آن افراز در شعاع ε از I قرار بگیرد. انتگرال تابع f را با نماد $\int_a^b f$ نشان می‌دهند.

فعالیت ۳. تابع پیوسته $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید تقریب‌های بالایی مجموع ریمان این تابع از پایین کران‌دار است.
به بزرگترین کران پایینی تقریب‌های بالایی، انتگرال بالایی f می‌گوییم و آن را با نماد $\overline{\int_a^b} f$ نشان می‌دهیم.

ب) به طور مشابه، نشان دهید که تقریب‌های پایینی مجموع ریمان این تابع از بالا کران‌دار است.
به کوچکترین کران بالایی تقریب‌های پایینی، انتگرال پایینی f می‌گوییم و آن را با نماد $\underline{\int_a^b} f$ نشان می‌دهیم.

ج) نشان دهید که $\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$.
در حقیقت تابع f را انتگرال‌پذیر می‌گوییم اگر انتگرال بالایی و پایینی آن با هم برابر باشد.

با توجه به فعالیت پیش، می‌توان قضیه زیر را اثبات کرد.

قضیه ۴. اگر تابع $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ پیوسته باشد، انتگرال‌پذیر است.

قضیه ۴ را می‌توان به توابع قطعه قطعه پیوسته تعمیم داد. ابتدا تعریف دقیق تابع قطعه قطعه پیوسته را بیان می‌کنیم.

تعریف ۵. تابع $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ را قطعه قطعه پیوسته می‌نامیم، در صورتی که برای بازه $[a,b]$ افرازی مانند

$$a = c_۰ < c_۱ < \cdots < c_l = b$$

وجود داشته باشد به طوری‌که

الف) تحدید f به هر زیربازه باز مانند $]c_{i-۱}, c_i[$ پیوسته باشد.

ب) $\lim\limits_{x \to c_i^-} f(x)$ برای هر $i = ۱, \cdots, l$ و $\lim\limits_{x \to c_i^+} f(x)$ برای $i = ۰, \cdots, l-۱$ وجود داشته باشد.

قضیه ۶. هر تابع قطعه قطعه پیوسته انتگرال‌پذیر است.

فعالیت ۴. تابع $f : [۰,۱] \to \mathbb{R}$ را با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} ۰ & x \text{ گویا} \\ ۱ & x \text{ گنگ} \end{cases}$$

در نظر بگیرید. انتگرال‌پذیری تابع f را بررسی کنید.

گزاره زیر خواص ابتدایی انتگرال را بیان می‌کند.

قضیه ۷.

الف) فرض کنید تابع‌های $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ انتگرال‌پذیر باشند. در این صورت، تابع $f+g$ نیز انتگرال‌پذیر است و

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

ب) فرض کنید $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ تابعی انتگرال‌پذیر و c عددی حقیقی باشد. در این صورت، تابع cf انتگرال‌پذیر است و

$$\int_a^b (cf) = c\int_a^b f.$$

ج) فرض کنید تابع‌های $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ انتگرال‌پذیر باشند و به ازای هر x در $[a,b]$، $f(x) \geq g(x)$. در این صورت،

$$\int_a^b f \geq \int_a^b g.$$

د) فرض کنید تابع $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ انتگرال‌پذیر باشد و $a < c < b$. در این صورت، تحدید f به $[a,c]$ و $[c,b]$ نیز انتگرال‌پذیر است و

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

برعکس، اگر تحدید تابع $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ به $[a,c]$ و به $[c,b]$ انتگرال‌پذیر باشد، تابع f روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است و تساوی بالا برقرار است.

توجه. فرض کنید $a \leq b$ و تابع $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ انتگرال‌پذیر باشد. در این صورت، $\int_b^a f$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\int_b^a f = -\int_a^b f.$$

با این قرارداد تساوی قسمت (د) قضیه ۷ همواره برقرار است مستقل از اینکه سه نقطه a، b و c به چه ترتیبی روی محور x قرار گیرند.

فعالیت ۵. قسمت‌های (الف) و (ج) قضیه ۷ را ثابت کنید.